

DOI 10.33099/2618-1614-2023-23-4-23-28  
УДК [629.7.025.1::629.735.33]:533.6.013.422

**О. В. Сафронов,**

*доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник центру воєнно-стратегічних досліджень, Національний університет оборони України,*

**Б. Й. Семон,**

*доктор технічних наук, професор, головний науковий співробітник науково-методичного центру організації наукової та науково-технічної діяльності, Національний університет оборони України,*

**О. М. Неділько,**

*кандидат технічних наук, доцент, провідний науковий співробітник науково-методичного центру організації наукової та науково-технічної діяльності, Національний університет оборони України*

## Метод оцінювання максимального рівня коливань аеродинамічних поверхонь керування надзвукових літаків у разі виникнення трансзвукового флатера

У статті запропонований метод оцінювання максимального рівня коливань аеродинамічних поверхонь керування надзвукових літаків у разі виникнення трансзвукового флатера, згідно з яким рівень коливань поверхонь керування визначається з умови порівняння їхніх збуджених шарнірних моментів і шарнірних моментів від сил аеродинамічного та конструкційного демпфірування. Метод може бути рекомендований для попереднього наближеного оцінювання максимального рівня коливань аеродинамічних поверхонь керування під час досліджень трансзвукового флатера. Можливість використання запропонованого методу оцінювання максимального рівня коливань аеродинамічних поверхонь керування підтверджена шляхом порівняння результатів розрахунків, одержаних за допомогою цього методу, з результатами, одержаними в експериментальних дослідженнях.

**Ключові слова:** математична модель, коливання, аеродинамічна поверхня керування, надзвукові літаки, безпека, число  $M$  польоту, трансзвуковий флатер, максимальний рівень коливань.

© О. В. Сафронов, Б. Й. Семон, О. М. Неділько, 2023

**П**остановка проблеми. Визначення безпечного рівня коливань аеродинамічних поверхонь керування надзвукових літаків у льотних дослідженнях трансзвукового флатера теоретичними методами залишається актуальною науковою та прикладною проблемою, оскільки оцінювання цього явища прямими методами, тобто шляхом досягнення максимально можливих режимів польоту безпосередньо в льотних дослідженнях, небезпечна.

**Аналіз основних досліджень і публікацій.** Теоретичним та експериментальним методам дослідження цього явища присвячено чимало публікацій [1–8], у яких запропоновані різноманітні підходи до обґрунтування причин виникнення інтенсивних коливань аеродинамічних поверхонь керування надзвукових літаків.

У цих дослідженнях відзначений нелінійний характер коливань та їхня залежність від великої кількості різноманітних параметрів [2]. До можливих причин виникнення коливань віднесена різна інтенсивність стрибків ущільнення під час їх переміщенні вперед і назад по профілю поверхні керування [3], фазові відношення між коливаннями поверхонь керування та рухом стрибків ущільнення [4], складна взаємодія стрибків ущільнення з коливаннями поверхонь керування [5–8]. Але справжній механізм цих коливань залишається остаточно не з'ясованим [2].

Одна з можливих математичних моделей цього явища запропонована в роботі [5] у вигляді диференційного рівняння другого порядку з нелінійною правою частиною

$$\ddot{\delta}(t) + \frac{\nu}{\pi} \omega \dot{\delta}(t) + \omega^2 \delta(t) = \frac{1}{J_k} [\bar{M}_a(\dot{\delta}) + \bar{M}_c(\dot{\delta})], \quad (1)$$

де  $\delta(t)$  – характер коливань аеродинамічної поверхні керування;

$\nu$  – логарифмічний декремент коливань поверхні керування;

$\omega$  – кутова частота власних пружних коливань поверхні керування;

$J_k$  – розподілений масовий момент інерції поверхні керування;

$\bar{M}_a(\dot{\delta})$  – розподілений шарнірний момент поверхні керування, зумовлений силами аеродинамічного демпфірування;

$\bar{M}_c(\dot{\delta})$  – розподілений збуджений шарнірний момент, зумовлений взаємодією коливань стрибків ущільнення з коливаннями поверхонь керування.

До цих шарнірних моментів аеродинамічної поверхні керування слід віднести і момент, зумовлений силами конструкційного демпфірування та інерційними характеристиками поверхні керування. Розподілена величина цього моменту, як випливає з рівняння (1), дорівнює

$$\bar{M}_k(\dot{\delta}) = -\frac{1}{\pi} J_k \nu \omega \dot{\delta}(t). \quad (2)$$

**Мета статті** – обґрунтувати можливість оцінювання максимального рівня коливань аеродинамічних поверхонь керування надзвукових літаків у разі виникнення трансзвукового флатера шляхом порівняння збуджених шарнірних моментів аеродинамічних поверхонь керування і шарнірних моментів від сил аеродинамічного та конструкційного демпфірування.

**Виклад основного матеріалу.** Найбільші труднощі у розв’язанні рівняння (1) виникають саме під час визначення збудженого шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування. У роботі [7] була запропонована математична модель оцінювання величини збудженого шарнірного моменту, тобто моменту, внаслідок якого виникають коливання аеродинамічних поверхонь керування. Розподілена величина цього моменту визначається рівнянням

$$\overline{M}_c(\dot{\delta}) \approx \Delta P_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{b_k}{\varphi_0 V_\phi} |\dot{\delta}(t)| \right] \frac{b_k^2 \dot{\delta}(t)}{\varphi_0 V_\phi \left[ 1 + \frac{b_1}{\varphi_0 V_\phi} |\dot{\delta}(t)| \right]^2}, \quad (3)$$

де  $\Delta P_0$  – максимальна величина зміни тиску місцевого надзвукового струменя за умови розташування стрибків ущільнення на задній кромці поверхні керування та за умови відсутності коливань;

$b_k$  – хорда профілю поверхні керування;

$\varphi_0$  – максимальний кут нахилу дотичної до дифузornoї частини профілю за умови відсутності коливань поверхні керування;

$V_\phi$  – швидкість польоту літака, за якої виникають коливання аеродинамічних поверхонь керування;

$b_1$  – відстань лінії максимальної товщини профілю від його задньої кромки.

Оскільки математична модель оцінювання величини збудженого шарнірного моменту поверхні керування має нелінійний характер, то розв’язок диференційного рівняння (1), тобто визначення амплітуди коливань поверхні керування в разі виникнення трансзвукового флатера, можна одержати за допомогою методу енергетичного балансу [9].

Згідно з методом енергетичного балансу амплітуда коливань аеродинамічних поверхонь керування визначається з рівності робіт збудженого шарнірного моменту аеродинамічних поверхонь керування і шарнірних моментів від сил аеродинамічного та конструкційного демпфірування за один період коливань.

Оскільки інтеграл залежності (3) не є табличним, у роботі [6] ця залежність була визначена адаптованою математичною моделлю збудженого шарнірного моменту аеродинамічних поверхонь керування, згідно з якою в роботі [8] і була визначена амплітуда цих коливань у разі виникнення трансзвукового флатера.

Але слід зауважити, що в тій самій роботі [6] визначена і максимально можлива величина розподіленого збудженого шарнірного моменту аеродинамічних поверх-

онь керування надзвукових літаків у разі виникнення трансзвукового флатера, подана залежністю

$$\overline{M}_0(\dot{\delta}) \approx 0,5 P_n (M_{10} - M_\infty) \frac{b_1 b_k^2}{2b_1 + b_k}, \quad (4)$$

де  $P_n$  – тиск повітря на висоті польоту;

$M_{10}$  – максимальне число  $M$  місцевого надзвукового струменя на поверхні керування за умови розташування стрибків ущільнення на задній кромці профілю та за умови відсутності коливань;

$M_\infty$  – число  $M$  незбудженого потоку повітря за умови розташування стрибків ущільнення на задній кромці профілю та за умови відсутності коливань.

Максимальна можлива величина цього шарнірного моменту спостерігається за умови

$$\dot{z}(t) = \frac{b_1}{b_1 + b_k}, \quad (5)$$

де  $\dot{z}(t)$  – груповий безрозмірний параметр, який ураховує геометричні дані аеродинамічного профілю, умови польоту літака й характер коливань аеродинамічної поверхні керування і визначається залежністю

$$\dot{z}(t) = \frac{b_1}{\varphi_0 V} \dot{\delta}(t). \quad (6)$$

Відомо [1–4], що коливання аеродинамічних поверхонь керування в разі виникнення трансзвукового флатера близькі до гармонічних коливань, тобто

$$\delta(t) = \delta_0 \sin \omega t, \quad (7)$$

де  $\delta_0$  – амплітуда коливань аеродинамічної поверхні керування.

З рівнянь (5)–(7) одержуємо мінімальну амплітуду коливань аеродинамічної поверхні керування, за якої збуджений шарнірний момент досягає максимальної величини й можливе виникнення трансзвукового флатера

$$\delta_{0\phi} = \frac{\varphi_0 V_\phi}{\omega(b_1 + b_k)}, \quad (8)$$

де  $\delta_{0\phi}$  – мінімальна амплітуда коливань аеродинамічної поверхні керування, за якої збуджений шарнірний момент досягає максимальної величини й можливе виникнення трансзвукового флатера.

Зауважимо, що амплітуда коливань аеродинамічних поверхонь керування сучасних надзвукових літаків, за якої збуджений шарнірний момент досягає максимальної величини й можливе виникнення трансзвукового флатера, спостерігається за умови

$$\delta_{0\phi} \approx 0,5 \varphi_0. \quad (9)$$

З умови (9) слідує, що збуджений шарнірний момент у разі виникнення трансзвукового флатера досягає максимальної величини за невеликих амплітуд коливань аеродинамічних поверхонь керування.

З аналізу залежності (4) випливає, що максимальна можлива величина збудженого шарнірного моменту

аеродинамічної поверхні керування залежить лише від умов польоту і геометричних характеристик системи «крило – аеродинамічна поверхня керування».

Зауважимо також, що коли амплітуди коливань аеродинамічної поверхні керування перевищують величину, визначену умовою (9), максимально можлива величина збудженого шарнірного моменту незначно зменшується. Тобто спостерігається ефект стабілізації збуджених шарнірних моментів аеродинамічних поверхонь керування.

Але, як можна бачити з рівняння (2), залежність шарнірного моменту від сил конструкційного демпфірування лінійно зростає зі збільшенням амплітуди коливань аеродинамічної поверхні керування.

Також зі збільшенням амплітуди коливань аеродинамічної поверхні керування лінійно зростає і величина шарнірного моменту від сил аеродинамічного демпфірування. Розподілена величина цього шарнірного моменту поверхні керування у праці [1] визначена залежністю

$$\bar{M}_a(\dot{\delta}) \approx -\frac{3}{8} \pi \rho_H V_\phi b_k^3 \dot{\delta}(t), \quad (10)$$

де  $\rho_H$  – густина повітря на висоті польоту.

З наведеного випливає, що максимальний рівень коливань аеродинамічної поверхні керування в разі виникнення трансзвукового флатера можна одержати спрощеним методом, без перетворення залежності (3), а саме шляхом порівняння збудженого шарнірного моменту, який визначається залежністю (4), і шарнірних моментів від сил аеродинамічного та конструкційного демпфірування, які визначаються залежностями (2) і (10).

З метою підвищення точності оцінювання рівня коливань аеродинамічної поверхні керування в разі виникнення трансзвукового флатера величину шарнірного моменту (10) визначимо за допомогою гіпотези динамічного скривлення [10], згідно з якою аеродинамічні характеристики профілю, що коливається, не відрізняються від характеристик сталого профілю, скривленого таким чином, що зміни місцевих (динамічних) кутів атаки його обтікання потоком повітря повинні відповідати умові

$$\Delta\delta(x; t) = \frac{x}{V_\phi} \dot{\delta}(t), \quad (11)$$

де  $x$  – відстань перетину хорди профілю поверхні керування від осі її обертання.

Відомо [1, 10], що складова розподіленої підйімальної сили, зумовлена кутом атаки, у тому числі й динамічним кутом (11), визначається залежністю

$$\Delta\bar{F}_1(x; \dot{\delta}) = C_y^\delta q \Delta\delta(x; t) = C_y^\delta \frac{q}{V_\phi} x \dot{\delta}(t), \quad (12)$$

де  $C_y^\delta$  – похідна коефіцієнту підйімальної сили за кутом відхилення поверхні керування;

$q$  – швидкісний напір незбудженого потоку повітря.

Розподілений шарнірний момент поверхні керування, зумовлений цією складовою підйімальної сили, визначається інтегралом від залежності (12)

$$\Delta\bar{M}_1(x; \dot{\delta}) = -\int_0^{b_k} \Delta\bar{F}_1(x; \dot{\delta}) dx. \quad (13)$$

Підставляючи залежність (12) в інтеграл (13), одержуємо максимальну величину цього шарнірного моменту поверхні керування

$$\Delta\bar{M}_1(\dot{\delta}) = -\frac{1}{3} C_y^\delta \frac{q}{V_\phi} b_k^3 \dot{\delta}(t). \quad (14)$$

Крім складової підйімальної сили, зумовленої динамічним кутом атаки, на профіль діє аеродинамічна сила, зумовлена динамічною кривизною аеродинамічного профілю поверхні керування. Величину цієї складової розподіленої підйімальної сили визначимо за допомогою наближеної формули С. А. Чаплигіна [11]

$$\Delta\bar{F}_2(f) \approx 2C_{y\phi}^\delta q f_0, \quad (15)$$

де  $f_0$  – максимальна величина кривизни профілю поверхні керування.

Можливість використання цієї формули для визначення аеродинамічної підйімальної сили, зумовленої динамічною кривизною профілю, була доведена в роботі [12].

Характер динамічного скривлення профілю поверхні керування визначається інтегралом від динамічного кута, поданого залежністю (11)

$$f(x; \dot{\delta}) = \int \frac{x}{V_\phi} \dot{\delta}(t) dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{V_\phi} \dot{\delta}(t). \quad (16)$$

Максимальною величина динамічного скривлення буде при  $x = 0,5b_k$  і, як випливає з рівняння (16), дорівнюватиме

$$f_0(\dot{\delta}) = \frac{1}{8} \frac{b_k^2}{V_\phi} \dot{\delta}(t). \quad (17)$$

Центр тиску цієї складової підйімальної сили розташований у середині хорди профілю поверхні керування. З урахуванням цього зауваження та залежностей (15) і (17) складову шарнірного моменту поверхні керування, зумовлену динамічною кривизною профілю поверхні керування, можна подати у вигляді

$$\Delta\bar{M}_2(f; \dot{\delta}) \approx -\frac{1}{8} C_{y\phi}^\delta \frac{q}{V_\phi} b_k^3 \dot{\delta}(t). \quad (18)$$

Таким чином, розподілений шарнірний момент поверхні керування, зумовлений силами аеродинамічного демпфірування, визначається сумою залежностей (14) та (18) і дорівнює

$$\bar{M}_a(\dot{\delta}) \approx -0,458 C_y^\delta \frac{q}{V_\phi} b_k^3 \dot{\delta}(t). \quad (19)$$

Ураховуючи наведене вище та беручи до уваги, що в разі виникнення трансзвукового флатера коливання аеродинамічних поверхонь керування мають гармонічний характер, максимальну амплітуду коливань визначимо з рівності залежностей (2), (4) та (19):

$$\delta_0 = \frac{0,5P_n(M_{10} - M_\infty) \frac{b_1 b_k^2}{2b_1 + b_k}}{0,458C_y^a \frac{q}{V_\phi} b_k^3 \omega + \frac{1}{\pi} \bar{J}_k \nu \omega^2} . \quad (20)$$

Максимальне число  $M_{10}$  у рівнянні (20) визначається відомою наближеною залежністю [7]

$$M_{10} \approx \sqrt[3]{1 + 11,5 \varphi_0} . \quad (21)$$

Число  $M_\infty$  незбудженого потоку повітря в рівнянні (20) визначається з умови формування стрибків ущільнення на поверхні аеродинамічного профілю [5, 7]

$$M_{10} - 1 \approx 2(M_\infty - M_{кр}) , \quad (22)$$

де  $M_{кр}$  – критичне число  $M$  аеродинамічного профілю.

Критичне число  $M$  аеродинамічного профілю в рівнянні (22) може бути визначене за результатами лабораторних досліджень [4, 13] або з такої наближеної залежності [5]:

$$M_{кр} \approx 1 - 0,7 \sqrt{\bar{\tau} \cos \chi} , \quad (23)$$

де  $\bar{\tau}$  – відносна товщина аеродинамічного профілю;  
 $\chi$  – кут стрілоподібності аеродинамічного профілю.

З метою визначення максимальної амплітуди коливань аеродинамічної поверхні керування в разі виникнення трансзвукового флатера, нагадаємо відомі залежності [14]:

$$q = \frac{1}{2} \rho_H V_\phi^2 = \frac{1}{2} k M_\phi^2 P_H ; \quad (24)$$

$$V_\phi = a_H M_\phi , \quad (25)$$

де  $k$  – показник адіабати (для повітря  $k \approx 1,405$ ),  
 $M_\phi$  – число  $M$  незбудженого потоку повітря, при якому виникає трансзвуковий флатер;  
 $a_H$  – швидкість звуку на висоті польоту.

З урахуванням залежностей (24) та (25) залежність (20) може бути подана у вигляді

$$\delta_0 = \frac{0,5P_H(M_{10} - M_\infty) \frac{b_1 b_k^2}{2b_1 + b_k}}{0,458\pi \rho_H a_H M_\phi \omega b_k^3 + \frac{1}{\pi} \bar{J}_k \nu \omega^2} . \quad (26)$$

У залежностях (25) і (26) невідоме число  $M_\phi$  можна визначити з умови формування стрибків ущільнення (22), яке в даному випадку має вигляд

$$M_{1\phi} - 1 \approx 2(M_\phi - M_{кр}) , \quad (26)$$

де  $M_{1\phi}$  – число  $M$  місцевого надзвукового струменя на поверхні керування, за якого виникає трансзвуковий флатер.

Число  $M_{1\phi}$  може бути визначене залежністю, аналогічною до залежності (21), але слід зауважити таке.

Під час коливань поверхні керування максимальний кут обтікання профілю  $\varphi_0$  місцевим надзвуковим струменем зменшується на величину

$$\Delta\varphi(\dot{\delta}) = \frac{b_k}{V_\phi} \dot{\delta}(t) . \quad (28)$$

У роботі [6] доведено, що максимальна величина збудженого шарнірного моменту поверхні керування спостерігається за умови

$$\frac{b_1}{\varphi_0 V_\phi} \dot{\delta}(t) = \frac{b_1}{b_1 + b_k} . \quad (29)$$

Із сумісного розв'язання залежностей (28) і (29) одержимо

$$\Delta\varphi(\dot{\delta}) = \varphi_0 \frac{b_k}{b_1 + b_k} . \quad (30)$$

З урахуванням залежностей (21) і (30) число  $M_{1\phi}$  визначимо таким чином:

$$M_{1\phi} \approx \sqrt[3]{1 + 11,5(\varphi_0 - \Delta\varphi)} = \sqrt[3]{1 + 11,5 \frac{b_1}{b_1 + b_k} \varphi_0} . \quad (31)$$

Можливість визначення максимальної амплітуди коливань аеродинамічних поверхонь керування в разі виникнення трансзвукового флатера теоретичним методом оцінимо шляхом порівняння результатів, одержаних за допомогою рівняння (26) і результатів, одержаних у льотних дослідженнях.

Максимальну амплітуду коливань аеродинамічних поверхонь керування в разі виникнення трансзвукового флатера визначимо з рівняння (26) за таких вхідних даних:

а) характеристики аеродинамічного профілю:

- відстань лінії максимальної товщини аеродинамічного профілю від його задньої кромки –  $b_1 = 1,5$  м;

- відносна товщина аеродинамічного профілю –  $\bar{\tau} = 0,042$ ;

- кут стрілоподібності –  $\chi = 45^\circ$  ;

б) характеристики поверхні керування:

- середня аеродинамічна хорда –  $b_k = 0,75$  м.;

- розподілений масовий момент інерції –  $\bar{J}_k = 1,0$  Н сек<sup>2</sup>;

- логарифмічний декремент коливань поверхні керування –  $\nu = 0,7$  ;

- кутова частота власних коливань –  $\omega = 239$  рад./сек.;

- похідна коефіцієнта піднімальної сили аеродинамічної поверхні керування літака за кутом її відхилення [14] –  $C_y^\delta = 2\pi$  ;

- максимальний кут нахилу дотичної до профілю поверхні керування для типових профілів ЦАГІ [8] –  $\varphi_0 \approx 0,85$   $\bar{\tau} = 0,0357$  рад.

Розрахункові дані для визначення амплітуди коливань аеродинамічних поверхонь керування:

- максимальне число  $M$  місцевого надзвукового струменя на поверхні керування за умови розташування стрибків ущільнення на задній кромці профілю –  $M_{10} = 1,121$  (згідно з рівнянням (21));

- критичне число  $M$  профілю –  $M_{кр} = 0,8794$  (згідно з рівнянням (23));

- число  $M$  незбудженого потоку повітря за умови розташування стрибків ущільнення на задній кромці профілю –  $M_{\infty} = 0,94$  (згідно з рівнянням (22));

- число  $M$  місцевого надзвукового струму на поверхні керування, за якого виникає трансзвуковий флатер –  $M_{1ф} = 1,084$  (згідно з рівнянням (31));

- число  $M$  незбудженого потоку повітря, за якого виникає трансзвуковий флатер –  $M_{ф} = 0,9214$  (згідно з рівнянням (27)).

Умови виконання льотного експерименту і рівень коливань аеродинамічної поверхні керування за стандартних величин швидкості звуку і густини повітря на висоті польоту  $H = 0$  км [15]:

- швидкість польоту, за якої виникає трансзвуковий флатер –  $V_{ф} = 313,46$  м/с (згідно з рівнянням (25) при  $M_{ф} = 0,9214$ );

- рівень коливань поверхні керування  $\delta_0 = 1,49^\circ$ .

Підставляючи ці дані і стандартні величини швидкості звуку й густини повітря в рівняння (26), одержимо максимально можливу величину амплітуди коливань аеродинамічної поверхні керування в разі виникнення трансзвукового флатера

$$\delta_0 = 0,0302 \text{ рад.} = 1,73^\circ.$$

Зауважимо, що одержана максимально можлива величина амплітуди коливань аеродинамічної поверхні керування на 16% більше, ніж у льотному експерименті.

Цю розбіжність можна пояснити таким чином.

З аналізу рівнянь (2) та (26) бачимо, що величина шарнірного моменту аеродинамічної поверхні керування визначена силами конструкційного демпфірування та інерційними характеристиками поверхні керування. У реальних умовах цей шарнірний момент залежить від характеристик системи «привод – аеродинамічна поверхня керування», а не лише від характеристик поверхні керування. Як вказано в роботі [8], визначення цих характеристик у лабораторних дослідженнях пов'язане з великими труднощами, оскільки практично неможливо відокремити частки шарнірних моментів, зумовлені аеродинамічними силами, силами конструкційного демпфірування та інерційними характеристиками системи «привод – аеродинамічна поверхня керування». Тому рівень коливань поверхні керування, одержаний за допомогою розрахункового методу, завжди більший, ніж рівень коливань, одержаний у льотному експерименті.

Утім, більший, а не менший. І це йде у запас міцності елементів конструкції поверхні керування, а тому й у запас безпеки польотів надзвукових літаків на трансзвукових швидкостях.

Цей метод може бути рекомендований для попереднього наближеного оцінювання максимального рівня коливань аеродинамічних поверхонь керування в перших випробувальних польотах надзвукових літаків під час досліджень характеристик трансзвукового флатера.

Прогнозування рівня коливань аеродинамічних поверхонь керування надзвукових літаків в експериментальних дослідженнях трансзвукового флатера доцільно виконувати за допомогою розрахунково-експериментального методу, як це було рекомендовано в роботі [8].

**Висновки.** У статті запропонований метод оцінювання максимального рівня коливань аеродинамічних поверхонь керування надзвукових літаків у разі виникнення трансзвукового флатера, згідно з яким рівень коливань аеродинамічних поверхонь керування визначається з умови порівняння їхніх максимально можливих збуджених шарнірних моментів і шарнірних моментів від сил аеродинамічного та конструкційного демпфірування.

Можливість використання запропонованого методу для попереднього наближеного оцінювання максимального рівня коливань аеродинамічних поверхонь керування підтверджена шляхом порівняння результатів розрахунків, одержаних за допомогою цього методу, з результатами, одержаними в експериментальних дослідженнях.

Подальші дослідження доцільно присвятити аналізу методів зменшення коливань аеродинамічних поверхонь керування в разі виникнення трансзвукового флатера.

### Перелік літератури

1. Бисплингхофф Р. Л. Аэроупругость / Р. Л. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р. Л. Халфмэн ; пер. с англ. Г. И. Баренблатта, А. И. Смирнова, В. П. Шидловского ; под ред. Э. И. Григолюка. – М. : Изд-во иностран. лит., 1958. – 800 с.
2. Аэродинамическое исследование колеблющейся поверхности управления при трансзвуковых скоростях / ЦАГИ. – М. : ЦАГИ, 1975. – 105 с. – (Обзоры ЦАГИ ; № 456).
3. Агеев Ю. И. Экспериментальное исследование установившихся колебаний элерона в околосзвуковом потоке / Ю. И. Агеев, В. В. Назаренко, Т. П. Небезина // Ученые записки ЦАГИ. – 1974. – Том V, № 8. – С. 71–80.
4. Левкин В. Ф. Экспериментальные исследования нестационарных аэродинамических характеристик поверхностей управления при трансзвуковых скоростях / В. Ф. Левкин. – М. : ЦАГИ, 1982. – 16 с. – (Труды ЦАГИ ; выпуск 2132).
5. Сафронов А. В. Уровень автоколебаний аэродинамических поверхностей управления при безотрывном обтекании околосзвуковым потоком газа / А. В. Сафронов // Проблемы прочности. – 1991. – № 4. – С. 51–55.
6. Сафронов О. В. Адаптована математична модель оцінки збуджених шарнірних моментів аеродинамічних поверхонь керування надзвукових літаків на трансзвукових швидкостях польоту / О. В. Сафронов, О. М. Неділько, В. О. Сафронов // Збірник наукових праць ЦВСД НУОУ ім. І. Черняховського. – 2014. – № 3 (52). – С. 28–33.
7. Сафронов А. В. Аэродинамическое воздействие скачков уплотнения на колеблющийся в околосзвуковом потоке элерон / А. В. Сафронов // Ученые записки ЦАГИ. – 1991. – Том XXII, № 3. – С. 110–117.

8. *Сафронов О. В.* Порівняльний аналіз теоретичних та розрахунково-експериментальних методів оцінки характеристик трансзвукового флатера / О. В. Сафронов, О. М. Неділько, В. О. Сафронов // Збірник наукових праць ЦВСД НУОУ ім. І. Черняхівського. – 2015. – № 1 (53). – С. 41–48.

9. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Пановко. – М. : Наука, 1980. – 272 с.

10. *Келдыш М. В.* Избранные труды. Механика / пред. ред. кол. А. П. Александров. – М. : Наука, 1985. – 568 с.

11. *Чаплыгин С. А.* О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела // Избранные труды. Механика жидкости и газа. Математика. Общая механика / пред. ред. кол. А. П. Виноградов. – М. : Наука, 1976. – (Классики науки). – С. 97–130.

12. *Сафронов А. В.* Применение формулы Чаплыгина С. А. для оценки аэродинамической силы колеблющегося профиля / А. В. Сафронов // Научно-технический сборник КВВАИУ. – 1989. – № 7. – С. 57–62.

13. *Свищев Г. П.* Эффективность руля и шарнирные моменты его при больших скоростях / Г. П. Свищев. – М. : ЦАГИ, 1975. – 10 с. – (Труды ЦАГИ ; выпуск 1722).

14. *Гошек И.* Аэродинамика больших скоростей / И. Гошек ; пер. с чешского А. А. Дородницына, М. М. Богословского. – М. : Изд-во иностран. лит., 1954. – 547 с.

15. *Лебедев А. А.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов / А. А. Лебедев, Л. С. Чернобровкин ; под ред. А. А. Лебедева. – М. : Оборонгиз, 1962. – 548 с.